LEZIONE 36

sabato 10 dicembre 2022 18:31

Riepilogo sulle EDO:

- equazioni integrali $y^{(n)} = f(x)$
- equazioni lineari di I ordine $y' = a(x)\, y + g(x)$.
- equazioni a variabili separabili $y' = g(x)\, h(y)$.
- equazioni lineari di II ordine a coeff. costanti
  $a y'' + b y' + c y = g(x)$.

ESERCIZIO

a) Determinare la soluzione generale dell'equazione $4y'' + 3y' - y = 7 - x$

b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 4y'' + 3y' - y = 7 - x \\ y(1) = 0 \qquad y'(1) = -2 \end{cases}$$

a) Risolviamo prima l'equazione omogenea $4y'' + 3y' - y = 0$

Eq. caratteristica: $4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -1 \end{cases}$$

Soluzione generale dell'equazione omogenea:

$$y_0(x) = C_1 e^{\frac{x}{4}} + C_2 e^{-x}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'eq. completa con il metodo di somiglianza:

$\bar{y}(x) = Ax + B \qquad \bar{y}'(x) = A \quad , \quad \bar{y}''(x) = 0$

Sostituiamo nell'equazione:

$$0 + 3A - (Ax + B) = 7 - x$$

$$-Ax + 3A - B = 7 - x$$

$$\begin{cases} -A = -1 \\ 3A - B = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3A - 7 = 4 \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = x - 4.$

La sol. generale dell'equazione completa è

$$y(x) = x - 4 + C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-x}$$

b) Risolviamo il problema di Cauchy. Determiniamo C_1 e C_2 imponendo che siano soddisfatte le condizioni

iv) Risolviamo il problema di Cauchy. Determiniamo c_1 e c_2 imponendo che siano soddisfatte le condizioni
$y(1) = 0$ e $y'(1) = -2$.

$$y(x) = x - 4 + c_1 e^{\frac{x}{4}} + c_2 e^{-x}$$
$$y'(x) = 1 + \frac{1}{4} c_1 e^{\frac{x}{4}} - c_2 e^{-x}$$

Quindi
$$y(1) = -3 + c_1 e^{\frac{1}{4}} + c_2 e^{-1}$$
$$y'(1) = 1 + \frac{1}{4} c_1 e^{\frac{1}{4}} + c_2 e^{-1}$$

Vogliamo che $y(1) = 0$ e $y'(1) = -2$ quindi:
$$\begin{cases} -3 + c_1 e^{\frac{1}{4}} + c_2 e^{-1} = 0 \\ 1 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} - c_2 e^{-1} = -2 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni: $-2 + \frac{5}{4} c_1 e^{\frac{1}{4}} = -2$
$$\Rightarrow \frac{5}{4} c_1 e^{\frac{1}{4}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Sostituendo nella prima equazione: $-3 + c_2 e^{-1} = 0$
$$\Rightarrow c_1 e^{-1} = 3 \Rightarrow c_1 = 3e$$

Soluzione del problema di Cauchy: $y(x) = x - 4 + c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_1 e^{-x}$
$$= x - 4 + 3e\, e^{-x} = x - 4 + 3 e^{1-x}.$$

<u>ESERCIZIO 2</u>

Determinare la soluzione generale di $y'' - 9y = \cos(3x)$.

—

1) Risolviamo l'eq. omogenea $y'' - 9y = 0$

Eq. caratteristica: $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3$.

Quindi $y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$.

2) Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'eq. completa:
$$y'' - 9y = \cos(3x)$$
$$\bar{y}(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) \quad \left(\begin{matrix}3i \text{ non è soluzione} \\ \text{dell'eq. caratteristica}\end{matrix}\right)$$
$$\bar{y}'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$$
$$\bar{y}''(x) = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$$
$\bar{y}'' - 9\bar{y}'' = \cos(3x)$ è equivalente a:
$$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) - 9(A\cos(3x) + B\sin(3x)) = \cos(3x)$$
$$-18A\cos(3x) - 18B\sin(3x) = \cos(3x)$$

$-18A\cos(3x) - 18B\sin(3x) = \cos(3x)$

da cui $A = -\frac{1}{18}$ e $B = 0$.

Dunque $\bar{y}(x) = -\frac{1}{18}\cos(3x)$

3) La sol. generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = -\frac{1}{18}\cos(3x) + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

Metodo di variazione delle costanti per trovare $\bar{y}$

Se la sol. generale dell'eq. omogenea è $y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ se può cercare $\bar{y}$ della forma $\bar{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$.

dove c_1 e c_2 sono due funzioni da determinare. Si può inoltre imporre $c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0$.

Notiamo che:

$$\bar{y}'(x) = \cancel{c_1' y_1} + c_1 y_1' + \cancel{c_2' y_2} + c_2 y_2' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$\bar{y}''(x) = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

Allora, richiedere che $a\bar{y}'' + b\bar{y}' + c\bar{y} = g(x)$ equivale a:

$$a(c_1'y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'') + b(c_1 y_1' + c_2 y_2') + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow a c_1' y_1' + a c_2' y_2' + c_1 \underbrace{(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{=0} + c_2 \underbrace{(a y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{=0} = g(x)$$

perché y_1 e y_2 risolvono l'eq. omogenea

Quindi $c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{g(x)}{a}$. Quindi $\bar{y}$ risolve l'eq. completa se c_1 e c_2 risolvono il sistema:

$$\begin{cases} c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{g(x)}{a} \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \end{cases}$$

L'idea è che da questo sistema si trovano c_1' e c_2' poi c_1 e c_2 si trovano integrando.

ESEMPIO PRECEDENTE:

$y'' - 9y = \cos(3x)$. Abbiamo visto che $y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$.

Cerchiamo $\bar{y}$ del tipo $\bar{y}(x) = c_1(x) e^{3x} + c_2(x) e^{-3x}$

In questo esempio $y_1(x) = e^{3x}$ e $y_2(x) = e^{-3x}$ $\left(y_1'(x) = 3e^{3x},\ y_2'(x) = -3e^{-3x} \right)$

Il sistema da risolvere è:

In questo esempio $y_1(x) = e$ e $y_2(x) = e$ $\quad (y_1'(x) = 3e \,,\, y_2'(x) = -3e)$

Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} c_1' \, 3e^{3x} - c_2' 3e^{-3x} = \cos(3x) \\ c_1' e^{3x} + c_2' e^{-3x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' = \frac{1}{6} e^{-3x} \cos(3x) \\ c_2' = -\frac{1}{6} e^{3x} \cos(3x) \end{cases}$$

Allora $c_1(x) = \int \frac{1}{6} e^{-3x} \cos(3x)\, dx$ e $c_2(x) = -\int \frac{1}{6} e^{3x} \cos(3x)\, dx$

Risolviamo gli integrali (integrazione per parti):

$$\int e^{-3x} \cos(3x)\, dx = \frac{1}{3} e^{-3x} \sin(3x) + \int e^{-3x} \sin(3x)$$

$$= \frac{1}{3} e^{-3x} \sin(3x) - \frac{1}{3} \cos(3x) - \int e^{-3x} \cos(3x)\, dx$$

da cui $2\int e^{-3x} \cos(3x)\, dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \cos(3x) + \frac{1}{3} e^{-3x} \sin(3x) + K$

$$\Rightarrow \int e^{-3x} \cos(3x)\, dx = -\frac{1}{6} e^{-3x} \cos(3x) + \frac{1}{6} e^{-3x} \sin(3x) + \frac{K}{2}$$

Quindi $c_1(x) = \frac{1}{6} \int e^{-3x} \cos(3x)\, dx = -\frac{1}{36} e^{-3x} \cos(3x) + \frac{1}{36} e^{-3x} \sin(3x) + K_1$

(possiamo scegliere $K_1 = 0$).

$$\int e^{3x} \cos(3x)\, dx \overset{y=-x}{=} -\int e^{-3y} \cos(3y)\, dy = \frac{1}{6} e^{-3y} \cos(3y) - \frac{1}{6} e^{-3y} \sin(3x) + K$$

$$= \frac{1}{6} e^{3x} \cos(3x) + \frac{1}{6} e^{3x} \sin(3x) + K.$$

Quindi $c_2(x) = -\frac{1}{6} \int e^{3x} \cos(3x) dx = -\frac{1}{36} e^{3x} \cos(3x) - \frac{1}{36} e^{3x} \sin(3x) + K_2$

(e possiamo scegliere $K_2 = 0$).

In conclusione:

$$\bar{y}(x) = \left(-\frac{1}{36} e^{-3x} \cos(3x) + \frac{1}{36} e^{-3x} \sin(3x)\right) e^{3x} + \left(-\frac{1}{36} e^{3x} \cos(3x) - \frac{1}{36} e^{3x} \sin(3x)\right) e^{-3x}$$

$$= -\frac{1}{36} \cos(3x) + \cancel{\frac{1}{36} \sin(3x)} - \frac{1}{36} e^{3x} \cos(3x) - \cancel{\frac{1}{36} \sin(3x)}$$

$$= -\frac{1}{18} \cos(3x).$$

Vantaggi:

- Il metodo di variazione delle costanti si può usare con qualsiasi g purché si sappiano calcolare gli integrali.
- Si applica ad equazioni lineari a coeff. non costanti (se si conosce $y_0(x)$)

Svantaggi

- Quando si possono applicare entrambi i metodi, il metodo di variazione delle costanti è più complicato.
- Richiede il calcolo di alcuni integrali.

Equazioni lineari di ordine n (a coeff. costanti).

Sono equazioni del tipo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad \text{con } a_0, a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}.$$

Si risolvono con gli stessi metodi che abbiamo visto per le eq. lineari di I e II ordine:

1) Si risolve l'equazione omogenea $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ trovandone la sol. generale $y_0(x)$.
2) Si trova una sol. particolare $\bar{y}$ dell' eq. completa.
3) $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$.

Per il punto 1) si considera l'eq. caratteristica:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (\text{pol. di grado } n).$$

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una sol. reale dell' eq. caratteristica allora $e^{\lambda x}$ risolve l'eq. omogenea $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$.
- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una sol. reale dell' eq. caratteristica di molteplicità m allora $e^{\lambda x}, e^{\lambda x} x, \dots, e^{\lambda x} x^{m-1}$ risolvono l'eq. omogenea.
- Se $\alpha \pm i\beta$ sono sol. complesse di molteplicità m dell' eq. caratteristica allora $e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, x, e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \dots,$ $e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, x^{m-1}, e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\, x^{m-1}$ sono soluzioni dell' eq. omogenea.

Combinando le funzioni trovate in questo modo si trova $y_0(x)$.

ESEMPIO

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

Polinomio caratteristico: $\lambda^3 - 3\lambda + 2$

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$

1 è una radice

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

quindi $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2)$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$ soluzioni $\lambda = 1$ (molt. 2), $\lambda = -2$ (molt. 1)

$2 \searrow -2$

$p(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ soluzioni $\lambda = 1$ (molt. 2) $\lambda = -2$ (molt. 1)

La soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^x x + c_3 e^{-2x}$.

Altri metodi per risolvere le EDO (sostituzioni)

Ci sono equazioni differenziali che non rientrano nei tipi che abbiamo studiato:

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' = e^{y'} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

è di II ordine ma non è lineare

Si può risolvere l'equazione con una sostituzione:

12

Se $z = y'$, allora z risolve

$$\begin{cases} z' = e^z \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{z'}{e^z} = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{e^z}\,dz = \int 1\,dx = x + c_1$$

$$\int \frac{1}{e^z}\,dz = \int e^{-z}\,dz = -e^{-z} + c_2$$

Quindi $-e^{-z} = x + c$

$z(0) = 0 \Rightarrow -e^0 = 0 + c \Rightarrow c = -1$

$-e^{-z} = x - 1 \Rightarrow e^{-z} = 1 - x$

$\Rightarrow -z = \log(1-x) \Rightarrow z(x) = -\log(1-x)$

Adesso ricordiamo che $z = y'$ quindi:

$y'(x) = -\log(1-x)$ (equazione integrabile)

$y(x) = -\int \log(1-x)\,dx$ $(t = 1-x \quad dt = -dx)$

$= +\int \log t\,dt = t\log t - \int t \cdot \frac{1}{t}\,dt = +t\log t - t + c$

$= (1-x)\log(1-x) - (1-x) + c$

$= (1-x)\log(1-x) + x - 1 + c$

Per concludere troviamo c usando $y(0) = 1$:

$1 = 1 \cdot \log 1 - 1 + c \iff 1 = -1 + c \iff c = 2$

Per concludere troviamo c usando $y(0) = 1$:

$$1 = 1 \cdot \log 1 - 1 + c \iff 1 = -1 + c \iff c = 2$$

Quindi la soluzione è $y(x) = (1-x)\log(1-x) + x + 1$

Non sempre la sostituzione è così facile da trovare!

ESEMPIO

$$y' + xy + y^2 = 0$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{x}{y} + 1 = 0$$

Sostituzione $z = \frac{1}{y}$

$z' = -\frac{1}{y^2} y'$

$$-z' + xz + 1$$

$$z' = xz + 1$$

Abbiamo trasformato l'equazione in un'eq. lineare di I ordine.

Nota: L'equazione precedente è un esempio di EQUAZIONE DI BERNOULLI

$$y'(x) + a(x)\, y'(x) + y(x)^{\alpha}$$

Sostituzione standard $\quad z(x) = y(x)^{1-\alpha}$

SUCCESSIONI

Def Una SUCCESSIONE (REALE) è una funzione di dominio $\mathbb{N}$ (oppure $\mathbb{N} \setminus A$ con A insieme finito) e codominio $\mathbb{R}$.

$$a : \mathbb{N} \setminus A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

(scriveremo a_n invece che $a(n)$)

Indicheremo le successioni con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Possiamo vedere le successioni come sequenze di numeri reali

ESEMPI

- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

  $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 16 \; \ldots\ldots$

- $\{a_n\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1}}$ con $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$:

  $a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{1}{5}, \ldots\ldots$

$m < 1$ ...

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{1}{5}, \ldots$$

Poiché le successioni sono funzioni possiamo calcolare i limiti delle successioni. Siccome il dominio di una successione è $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{N} \setminus A$) e $D(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$ ($D(\mathbb{N} \setminus A) = \{+\infty\}$) l'unico limite che si può calcolare per le successioni è quello per $n \to +\infty$.

ESEMPI

- $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + 1}{1 + n - 2n^3} = -\frac{1}{2}$

- $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} e^{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

Poiché per $n \to +\infty$ si ha che $\frac{1}{n} \to 0$, possiamo usare lo sviluppo di Taylor $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$ con $x = \frac{1}{n}$: $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ e quindi $\lim_{n \to +\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$= \lim_{n \to +\infty} 1 + o(1) = 1.$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} e^{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^1 = e.$$